

# 2021학년도 경희고등학교 수학과 시강

## 〔안내사항〕

1. 시강(또는 교과면접) + 교직면접 = 20분 내외 진행로 진행됩니다.
2. 지도안은 첨부된 [교과서]와 [문항]을 참고하여 1차시의 지도안을 작성해주시기 바랍니다.
3. 수업 시강에는 아래 [문항]을 포함하여 15분 이내의 수업을 진행해주시기 바랍니다.

## 〔문항〕

1. 다음 함수의 그래프의 특징을 정리하여 설명해주시기 바랍니다.

①  $y = \log_a (bx - c)$  (단,  $a > 0, a \neq 1$ )

②  $y = a \cos (bx - c)$

2. [문항1]에 이어서 다음 문항에 대해 설명해주시기 바랍니다.

자연수  $n$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가 다음과 같다.

$$f(x) = \log_{n+\frac{1}{2}}(x+1)$$

$$g(x) = |\cos(2n-1)\pi x|$$

$f(x) = g(x)$ 를 만족시키는 실수  $x$ 의 개수를  $a_n$ 이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{30} \frac{2}{\sqrt{a_n a_{n+1}}}$ 의 값을 구하시오.

## 여러 가지 수열의 합

일반항이 유리식 또는 무리식으로 주어진 수열의 합을 구해 보자.

### 함께 해결하기 2

다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$



분수의 꼴로 이루어진 수열의 합은 어떻게 구할 수 있는가?

일반항이  $\frac{1}{AB}$ 의 꼴인 수열은 각 항을

$$\frac{1}{B-A} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$$

의 꼴로 변형한 후 식을 정리하여 수열의 합을 구할 수 있다.



$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$$

( $A \neq B$ )의 꼴로 변형한다.

자연수  $k$ 에 대하여

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

수열의 합을 합의 기호  $\Sigma$ 를 사용하여 나타낸 후 계산한다.

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

**답**  $\frac{n}{n+1}$

문제 5 다음 식의 값을 구하시오.

(1)  $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2)  $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$

문제 6 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_n = \sum_{k=1}^n k$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$ 의 값을 구하시오.

3

다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3+2}} + \frac{1}{\sqrt{4+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1+\sqrt{n}}}$$



분모에 근호가 포함된 수열의 합은 어떻게 구할 수 있는가?

일반항이  $\frac{1}{\sqrt{A+\sqrt{B}}}$ 의 꼴인 수열은 분모를 유리화한 후 식을 정리하여 수열의 합을 구할 수 있다.



일반항의 분모를 유리화한다.

자연수  $k$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k+1+\sqrt{k}}} &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} \\ &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \end{aligned}$$

수열의 합을 합의 기호  $\Sigma$ 를 사용하여 나타낸 후 계산한다.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3+2}} + \frac{1}{\sqrt{4+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1+\sqrt{n}}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1+\sqrt{k}}} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1}-1 \end{aligned}$$

답  $\sqrt{n+1}-1$

문제 7 다음 식의 값을 구하시오.

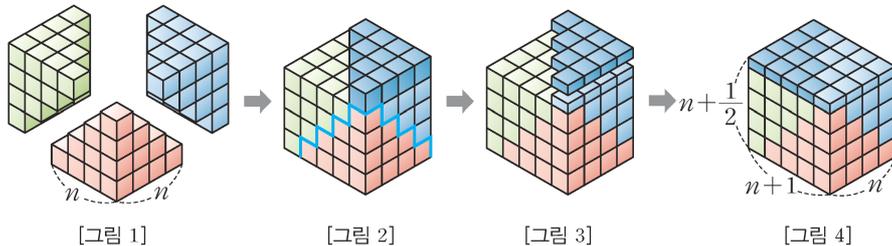
$$\frac{2}{\sqrt{3+1}} + \frac{2}{\sqrt{5+\sqrt{3}}} + \frac{2}{\sqrt{7+\sqrt{5}}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{81+\sqrt{79}}}$$

생각 키우기



문제 해결 의사소통

다음 그림을 이용하여  $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이 성립하는 까닭을 설명해 보자.



[출처: Nelsen, R. B., "Proofs without words"]